

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Топология I
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики кафедра современной математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 5

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры современной математики 02.09.2024

Аннотация

Большинство разделов современной математики используют основные понятия топологии, прогресс которой в XX и XXI веке сделал ее одной из основных математических дисциплин. Цель курса – ознакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами топологии. Основное внимание уделяется основным понятиям топологии. В качестве базы даются понятия топологического пространства, компактности, CW-комплексов, гомотопий. Подробно разбираются компактные поверхности. Курс доводится до теоремы Брауэра о неподвижной точке, примеров вычисления фундаментальных групп и теории векторных полей. Теория гомологий и когомологий, Функторы Tor и Ext, связь с гладкими многообразиями изучается в последующих более продвинутых курсах топологии.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по топологии для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области общей и маломерной топологии;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении топологических результатов с контекстом математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия топологии и, более детально, теории поверхностей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с топологическими и метрическими пространствами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм	4	4		10
2	Основные топологические свойства пространств.	2	2		7
3	Метрические пространства.	2	2		7
4	Основные конструкции производных топологических пространств.	2	2		7
5	СВ-комплексы и симплициальные комплексы.	2	2		7
6	Многообразия.	2	2		7
7	Поверхности: сферы с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна. Эйлера характеристика	4	4		10
8	Гомотопии и гомотопическая эквивалентность. Степень отображения из окружности в окружность	4	4		11
9	Фундаментальная группа.	2	2		7
10	Накрытия.	2	2		7

11	Векторные поля на плоскости и на поверхностях. Траектории и особые точки, индекс векторного поля	4	4		10
Итого часов		30	30		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм

Топологическое пространство.

Непрерывные отображения.

Гомеоморфизмы.

Подмножества конечномерного евклидова пространства и другие примеры топологических пространств.

2. Основные топологические свойства пространств.

Компактность.

Связность, линейная связность.

Хаусдорфовость.

3. Метрические пространства.

Метрические пространства.

Индукцированная топология.

4. Основные конструкции производных топологических пространств.

Дизъюнктное объединение.

Декартово произведение.

Фактор-пространство.

Конус.

Надстройка.

Джойн.

5. CW-комплексы и симплициальные комплексы.

CW-комплексы и симплициальные комплексы.

Категория PL.

6. Многообразия.

Топологическое понятие многообразия.

Примеры: сфера, проективное пространство, тор.

7. Поверхности: сферы с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна. Эйлерова характеристика

Поверхности.

Примеры: сферы с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна.

Эйлерова характеристика

Топологическая классификация поверхностей.

8. Гомотопии и гомотопическая эквивалентность. Степень отображения из окружности в окружность

Гомотопии и гомотопическая эквивалентность.

Степень отображения из окружности в окружность

Теорема Брауэра о неподвижной точке.

9. Фундаментальная группа.

Фундаментальная группа.

Методы вычисления фундаментальной группы.

Примеры.

10. Накрытия.

Накрытия.

Универсальная накрывающая.

Соответствие между накрытиями и подгруппами фундаментальной группы.

11. Векторные поля на плоскости и на поверхностях. Траектории и особые точки, индекс векторного поля

Траектории и особые точки.

Индекс векторного поля.

Теорема Пуанкаре о равенстве индекса и эйлеровой характеристики.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001 .— Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.

Дополнительная литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учебник для вузов] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Факториал Пресс, 2000 .— 448 с.
2. Введение в теорию множеств и общую топологию [Текст] / П. С. Александров - М.Физматлит,2009

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
кафедра современной математики
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Топология I» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия топологии и, более детально, теории поверхностей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с топологическими и метрическими пространствами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм
2. Подмножества конечномерного евклидова пространства и другие примеры топологических пространств
3. Компактность, связность, линейная связность, хаусдорфовость
4. Метрические пространства. Индуцированная топология
5. Дизъюнктное объединение, декартово произведение, фактор-пространство, конус, надстройка, джойн
6. CW-комплексы и симплициальные комплексы. Категория PL
7. Многообразия. Примеры: сфера, проективное пространство, тор
8. Поверхности: сферы с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна. Эйлерова характеристика
9. Топологическая классификация поверхностей
10. Гомотопии и гомотопическая эквивалентность. Степень отображения из окружности в окружность
11. Теорема Брауэра о неподвижной точке
12. Фундаментальная группа. Примеры и методы ее вычисления
13. Накрытия. Универсальная накрывающая. Соответствие между накрытиями и подгруппами фундаментальной группы
14. Векторные поля на плоскости и на поверхностях. Траектории и особые точки, индекс векторного поля
15. Теорема Пуанкаре о равенстве индекса и эйлеровой характеристики

Пример экзаменационного билета:.

- 1) Бутылка Клейна.
- 2) Соответствие между накрытиями и подгруппами фундаментальной группы.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.